



СОДЕРЖАНИЕ

Основная школа

Р. М. Абдулов М. С. Свечникова	ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЦИФРОВОЙ ЛАБОРАТОРИИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ РАЗДЕЛА «ДАВЛЕНИЕ»	3
-----------------------------------	---	---

Старшая школа

М. А. Фаддеев Ю. В. Масленникова Н. С. Тараканов	ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕЛОМЛЕНИЯ И ОТРАЖЕНИЯ ПУЧКОВ СВЕТА В ТРЕУГОЛЬНОЙ ПРИЗМЕ	11
--	---	----

Высшая школа

А. И. Грибков Р. В. Романов	ПРОСТОЙ МАЯТНИК: ИСТОРИЯ, ТЕОРИЯ, РЕАЛЬНОСТЬ И ВИРТУАЛЬНОСТЬ	22
А. А. Кривушин О. А. Милованова С. А. Кривушина	ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ИМПЕДАНС БИОТКАНИ В УЧЕБНОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ МЕДИЦИНСКОГО ВУЗА	40
В. В. Майер Ю. А. Корнев	ПОЛУЧЕНИЕ ПОСТОЯННОГО НАПРЯЖЕНИЯ ОТ ВЫСОКОВОЛЬТНОГО ПЬЕЗОГЕНЕРАТОРА	56

Технологии обучения

П. В. Зуев В. Е. Сидоров	ПРОПЕДЕВТИКА ОБУЧЕНИЯ ФИЗИКЕ УЧАЩИХСЯ ИНЖЕНЕРНЫХ КЛАССОВ НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ В УСЛОВИЯХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО КЛАСТЕРА	66
-----------------------------	---	----

Науковедение

Ю. А. Сауров	ЭССЕ О КНИГЕ «ФИЗИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В КУРСЕ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ»	76
--------------	---	----

АВТОРЫ ЖУРНАЛА	80
----------------------	----

Редакция журнала:

В. В. Майер (главный редактор), Р. В. Акатов, Е. И. Вараксина, Л. С. Кропачева

Редакционный совет:

С. В. Барышников	д.ф.-м.н., профессор, Благовещенск
И. В. Гребенев	д.п.н., профессор, Нижний Новгород
М. Д. Даммер	д.п.н., профессор, Челябинск
П. В. Зуев	д.п.н., профессор, Екатеринбург
О. В. Лебедева	д.п.н., доцент, Нижний Новгород
Ю. А. Сауров	д.п.н., профессор, член-корр. РАО, Киров
А. П. Усольцев	д.п.н., профессор, Екатеринбург
А. А. Шаповалов	д.п.н., профессор, Барнаул

Оргкомитет конференции:

Н. Я. Молотков	д.п.н., профессор, Тамбов
Ф. А. Сидоренко	д.ф.-м.н., профессор, Екатеринбург
Я. А. Чиговская-Назарова	к.филол.н., доцент, ректор ГИПУ, Глазов
Т. Н. Шамало	д.п.н., профессор, Екатеринбург

Перечень ВАК: Журнал «Учебная физика» включен Высшей аттестационной комиссией (ВАК) Минобрнауки России в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук».

Адрес редакции, издателя и типографии: 427621, Удмуртия, Глазов, Первомайская, 25, ФГБОУ ВО «ГИПУ», Телефон: (341 41) 5–32–29.
E-mail: uch-fiz@mail.ru, kropach@bk.ru

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Глазовский государственный инженерно-педагогический университет имени В. Г. Короленко»

Журнал «Учебная физика» зарегистрирован Комитетом Российской Федерации по печати 4 февраля 1997 года, регистрационный № 015686, перерегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор) 2 мая 2017 года, ПИ № ФС77–69506.

Подписной индекс: 79876.

Использование и перепечатка материалов допускаются только по договоренности с редакцией журнала.

Сдано в набор 02.09.25. Подписано в печать 25.09.25.

Дата выхода в свет: 30.09.25.

Формат 60 × 90 1/16. Усл. печ. л. 5,0.

Заказ 171. Тираж 200 экз. Цена свободная.

Первая страница обложки: Экспериментальная установка для проверки закона Кулона в демонстрационном опыте.

Научная статья

ББК 74.262.23

УДК 372.853

А. И. Грибков, Р. В. Романов

ПРОСТОЙ МАЯТНИК: ИСТОРИЯ, ТЕОРИЯ, РЕАЛЬНОСТЬ И ВИРТУАЛЬНОСТЬ

В работе рассматриваются затухающие колебания физического маятника простой формы. Публикация базируется на исторических фактах, количественной теории и ее проверке опытом. Также описано компьютерное приложение, моделирующее эксперимент. В статье приведено несколько возможных способов проведения эксперимента, для повторения которых не требуется специального лабораторного оборудования, проведено их сравнение.

Ключевые слова: маятник, эксперимент, колебания, затухающие, смартфон, *Arduino*, моделирование.

A. I. Gribkov, R. V. Romanov

SIMPLE PENDULUM: HISTORY, THEORY, REALITY AND VIRTUALITY

The paper considers damped oscillations of a simple-shaped physical pendulum. The publication is based on historical facts, quantitative theory and its verification by experiment. A computer application simulating the experiment is also described. The article presents several possible methods of conducting an experiment, which do not require special laboratory equipment to repeat, and their comparison is carried out.

Keywords: pendulum, experiment, oscillations, damping, smartphone, *Arduino*, simulation.

DOI: 10.62957/2307-5457-2025-3-22-39

— Вы откуда? —
осторожно осведомился Волька,
медленно раскачиваясь под самым
потолком, точно маятник
Лагин Л. И. Старик Хоттабыч [1]

1. Введение

Кто только, где, когда и с какими целями не изучал и не применял устройство, которое сейчас называют маятником (pendulum).

Одним из первых достоверных применений маятника был сейсмограф китайского ученого династии Хань Чжан Хэн (Zhang Heng,

промежутка времени» [7, с. 190], то есть, переводя на язык формул,

$$l \sim \nu^{-2}, \quad (1)$$

где l — длина, ν — частота. По сути дела, он говорит о части формулы Гюйгенса (Christiaan Huygens, Lord of Zeelhem, 1629–1695), полученной позже.

В 1673 году Гюйгенс опубликовал свой мемуар «Horologium oscillatorium, sive de motu pendulorum an horologia aptato demonstrationes geometrica» (сокр. «Маятниковые часы») (рис. 1.3), в IX теореме V главы которого приводится, правда в словесной форме, формула периода математического маятника: «Если подвешенное на нити тело описывает очень малые горизонтальные круги, то продолжительность одного оборота относится ко времени, в котором тело в свободном падении прошло бы длину, превышающую длину нити маятника в два раза, как окружность круга к его диаметру» [8, с. 209]. На языке математики это выглядит как хорошо знакомое каждому школьнику выражение

$$\frac{T}{t} = \frac{L}{d}, \quad \frac{L}{d} = \pi, \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2(2l)}{g}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (2)$$

где T — период маятника; L и d — длина и диаметр окружности; t — время падения тела с высоты $h = 2l$; g — ускорение свободного падения.

Здесь заметим, что если верить точности перевода, то, конечно, речь идет о коническом маятнике. Но с учетом малости кругов и точности приборов того времени, расстояние между плоскостью орбиты и точкой подвеса, которое должно входить в формулу для периода конического маятника, практически равно длине нити, которая входит в формулу математического маятника.

Эстафету изучения устройства подхватили маятники Фуко (Jean Bernard Leon Foucault, 1819–1868) (рис. 2.1), маятник Ньютона (Sir Isaac Newton, 1643–1727) (другое название — колыбель Ньютона, Newton's cradle) (рис. 2.2), дисковый Максвелла (James Clerk Maxwell, 1831–1879), оборотный Кейтера (Henry Kater, 1777–1835), Обербека (Anton Oberbeck, 1846–1900), «вверх ногами» П. Л. Капицы (1894–1984) (рис. 2.3) [9] и другие.

Уточним. Устройство «маятник Ньютона» придумал не Ньютон. Французский аббат и по совместительству физик (или наоборот) Мариотт (Edme Mariotte, 1620–1684) описал очень похожее устройство в своей работе 1673 года [11], что признавал и сам сэр Исаак, а название, считается, предложил английский актер Саймон Преббл (Simon Micawber Prebble) в 1967 году для успешных продаж этой настольной игрушки для руководителя [12]. Аналогичная ситуация и с маятником Максвелла, известным как игрушка Йо-йо (Yo-yo) как минимум с 440 г. до н. э. [13].

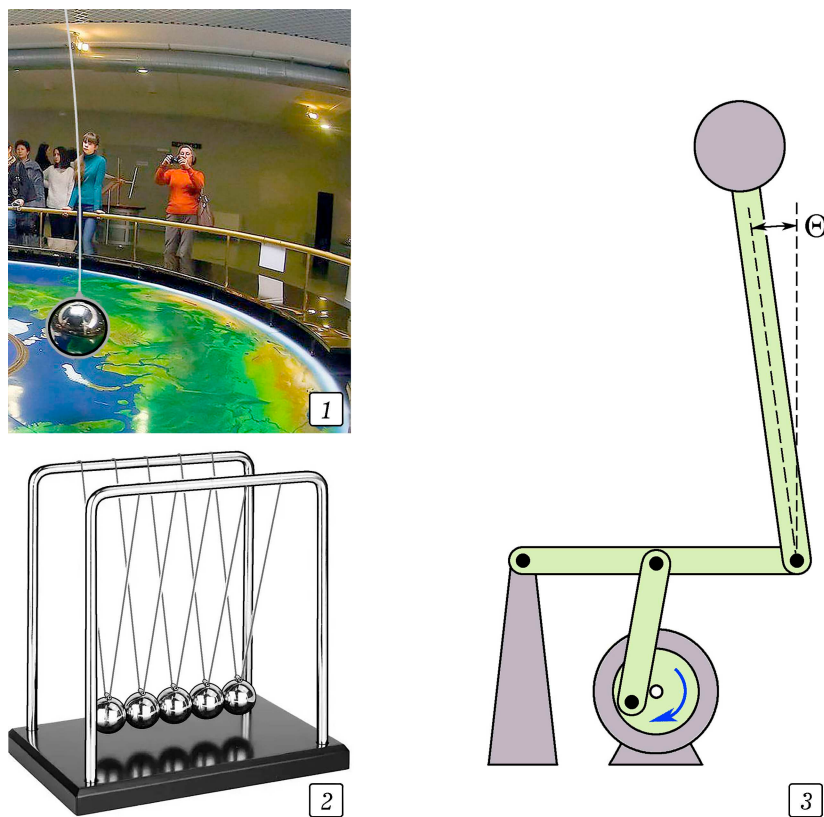


Рис. 2. История изучения и применения маятника: 1 — маятник Фуко [10]; 2 — маятник Ньютона; 3 — схема маятника Капицы

В XX веке теория маятника прочно вошла не только в вузовские [14, с. 233], но и школьные [15, с. 56] учебники.

Не обошли своим вниманием маятник и деятели литературы и искусства. В рассказе «Колодец и маятник» («The pit and the pendulum») [16] Эдгара По (Edgar Allan Poe, 1809–1849) маятник олицетворяет надвигающуюся гибель главного героя. В романе «Степной волк» («Der Steppenwolf») [17] Г. Гессе (Hermann Karl Hesse, 1877–1962) герой размышляет о цикличности жизни. К образу маятника обращались Н. С. Гумилев (1886–1921) [18], И. Ф. Анненский (1855–1909) [19], К. Д. Бальмонт (1867–1942) [20], О. Э. Мандельштам (1891–1938) [21, с. 332], современные поэты [22, 23].

Образ раскачивающегося маятника встречается в музыке, например, русского композитора и пианиста Н. К. Метнера (1880–1951)

[24], маятника Фуко в сочинении В. Тарнопольского [25]. Также хорошо известен «Pendulum» — шестой студийный альбом американской группы Creedence Clearwater Revival 1970 года [26].

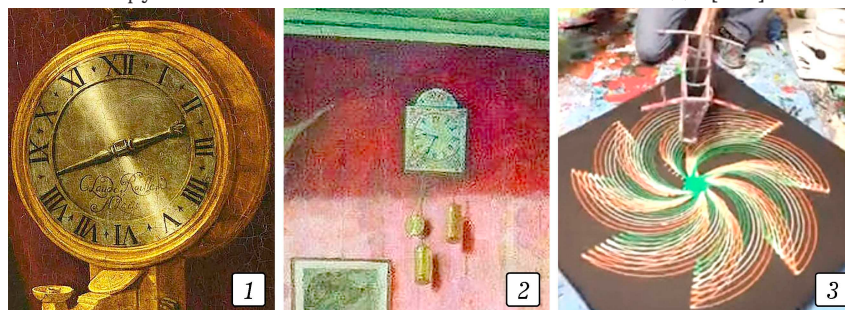


Рис. 3. Маятник в изобразительном искусстве: 1 — фрагмент картины Антонио Переда-и-Сальгадо; 2 — фрагмент картины К. С. Петрова-Водкина; 3 — картина Бьорна Кирша

В изобразительном искусстве маятник также часто встречается как метафора течения времени, жизни и смерти. Известна картина «Натюрморт с маятником» (точнее, «Натюрморт с часами») (рис. 3.1) испанского художника, представителя стиля Ванитас, Антонио Переда-и-Сальгадо (Antonio de Pereda y Salgado (1611–1678) [27]. Обратите внимание на год создания (1652) и отсутствие минутной стрелки. Чувство, отраженное в названии, возникает и при виде отклоненного маятника на картине К. С. Петрова-Водкина (1878–1939) (рис. 3.2) [28]. А художник из Германии Бьорн Кирш (Bjoern Kirsch) [29] наоборот с помощью маятника рисует картины (рис. 3.3).

Не обошлось без маятника и в индустрии развлечений, иногда с научным содержанием. Например, аттракцион «Пиратский корабль», используя принципы маятника, раскачивается вперед-назад, набирая скорость и высоту. А «колыбель Ньютона» можно увидеть во многих офисах.

И куда же без использования маятника с весьма сомнительными научными целями. С древних времен китайцы, и не только они, использовали покачивание маятника для определения пола будущего ребенка, поиска водоносных слоев, измерения артериального давления и т. д. [30].

В настоящее время современные пытливые умы продолжают изучать это простое, на первый взгляд, устройство, как в учебных [31], так и в исследовательских [32] целях с качественно приемлемыми [33] результатами.

Курс истории физики давно и прочно почему-то исчез из учебных планов, хронология открытий и фамилии ученых ничего не говорят большинству современных школьников и студентов (проверено экспериментально!), да и кругозор их достаточно узок, поэтому мы позволили себе этот историко-художественный экскурс, чтобы

хотя бы очень кратко познакомить студентов с великими учеными и их исследованиями.

Здесь же несколько слов о термине «простой маятник». Изучаемый далее объект вряд ли можно назвать математическим маятником в строгом понимании. Конечно, это физический маятник, но внешне очень похож на математический. Поэтому выбран такой объектный термин.

2. Постановка задачи

Часто в учебниках, задачниках или статьях можно встретить фразу: «силой сопротивления воздуха пренебречь», что в большинстве случаев вполне оправданно. Мы же поступим наоборот. Выясним, можно ли экспериментально в достаточно простых условиях учебной физической лаборатории и с доступным оборудованием количественно учесть влияние силы сопротивления воздуха, и если да, то какой именно: по Стоксу (Sir George Gabriel Stokes, 1819–1903) или по Ньютону.

Здесь же сформулируем явно вытекающие из условия задачи требования к установке. Подвешенное тело должно быть простой формы (шар), большого размера, так как сила сопротивления пропорциональна размеру поперечного сечения, вместе с тем — легкое (сфера), чтобы динамически не растягивать подвес. Подвес должен быть достаточно жестким, чтобы не изгибаться в процессе движения, тонким, чтобы сила сопротивления была как можно меньше, и длинным для увеличения периода. Какая-либо нить не подходит, так как шар может приобрести вращение относительно своей оси. Верхняя точка крепления подвеса не должна двигаться, то есть опора должна быть жесткой и с минимальным трением, лучше вообще без него. Углы отклонения не могут быть слишком малыми из-за трудностей с их измерением. Вместе с тем углы не могут быть и слишком большими из-за возможного изгиба подвеса, а также возникающей зависимости периода от амплитуды, хотя для численных расчетов это ограничение не существенно. Устройства фиксации времени и положения должны быть автоматическими с малой дискретностью.

С другой стороны, систему нельзя делать слишком легкой, так как становится затруднительным учесть небольшие факторы, как, например, упругость стержня, призмы и платформы, возможность колебаний в перпендикулярном направлении, гладкость поверхностей сферы и стержня и т. д. Конкретные параметры приведем в экспериментальной части.

3. Теоретическое рассмотрение процесса

Пусть толстостенная сфера закреплена на одном конце длинного тонкого жесткого гладкого стержня, другой конец которого прикреплен к перевернутой призме, опирающейся на горизонтальную ось OZ , направленную к нам, и может колебаться в вертикальной плоскости XOY без трения. Система полностью погружена в вязкую

среду (рис. 4.1). В одном из вариантов опыта для измерения углов использовался смартфон.

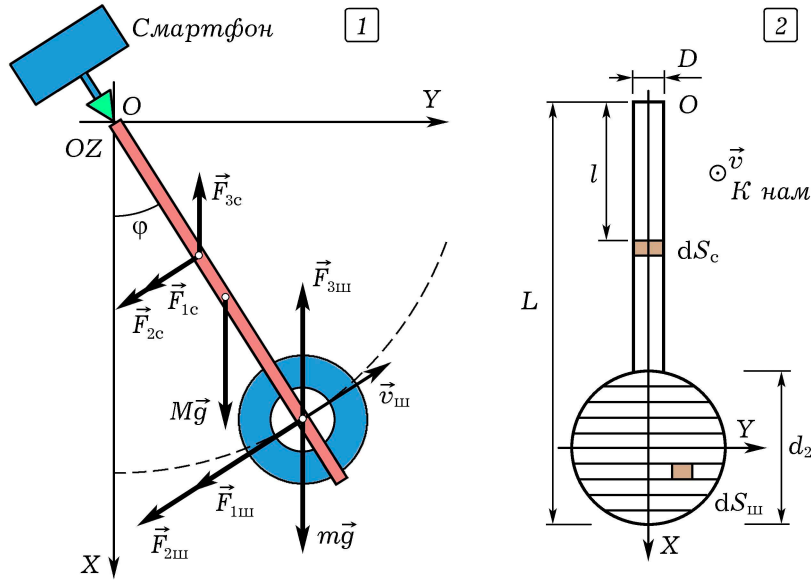


Рис. 4. К теоретическому рассмотрению процесса: 1 — принципиальная схема экспериментальной установки; 2 — к расчету моментов сил

Некоторые обозначения не показаны на рисунке, а описаны словами. Параметры сферы: m — масса; d_2 — внешний диаметр; d_1 — внутренний диаметр. Параметры стержня круглого сечения: M — масса; L — длина; D — диаметр. Параметры среды: ρ_0 — плотность; η — коэффициент динамической вязкости. Силы, действующие на сферу, для удобства сведены в таблицу.

$m\vec{g} = \rho_{ш}V_{ш}\vec{g}$	Сила тяжести, приложенная к центру сферы
$\vec{F}_{3ш} = -\rho_0V_{ш}\vec{g}$	Сила Архимеда
$\vec{N}_{ш}$	Сила реакции стержня, действующая на сферу (на рисунке не показана)
$\vec{F}_{1ш} = -3\pi\eta d_2\vec{v}_{ш}$	Сила сопротивления среды по Стоксу
$\vec{F}_{2ш} = -c_{ш}\frac{\rho_{ш}S_{ш}}{2}v_{ш}\vec{v}_{ш}$	Сила аэродинамического (лобового) сопротивления по Ньютону [34, с. 205] при прямолинейном движении

Здесь $\rho_{ш} = m/V_{ш}$ — средняя плотность шара; $g = 9,814 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения в Туле; $V_{ш} = \pi d_2^3/6$ — внешний объем сферы; $v_{ш}$ — линейная скорость центра масс сферы. Масса сферы измеряется уже с учетом отверстий под стержень. Так как стержень небольшого диаметра, то и поправка небольшая. При колебательном

движении скорость меняется вдоль диаметра, что будет учтено ниже при определении момента этой силы.

Учет силы $\vec{F}_{2ш}$ актуален при сравнительно больших скоростях, когда сопротивление среды обусловлено, в основном, затратой энергии на образование вихрей. Реальный эксперимент показывает, что именно эта сила играет основную роль. Что считать в данном случае большой скоростью, также будет показано ниже.

Другие обозначения: $S_{ш} = \pi d_2^2/4$ — площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную к направлению движения (миделевое — от нидерл. Middel — средний, середина — сечение); $c_{ш}$ — коэффициент, различный для тел разных форм, называемый коэффициентом лобового сопротивления. В нашей задаче будет использовано значение для шара $c_{ш} = 0,47$, если поверхность шероховатая. Если поверхность была бы идеально гладкой, то $c_{ш} = 0,10$ [35].

На стержень действуют силы, приведенные в таблице.

$M\vec{g} = \rho_c V_c \vec{g}$	Сила тяжести
$\vec{F}_{3c} = -\rho_0 V_c \vec{g}$	Сила Архимеда
$\vec{N}_c$	Сила реакции сферы, действующая на стержень, на рисунке не показана
$\vec{N}$	Сила реакции оси, действующая на стержень, на рисунке не показана
$\vec{F}_{тр}$	Сила трения в оси, на рисунке не показана, считаем ее малой, или в случае призмы вообще отсутствующей
$\vec{F}_{1c} = -\mu_c \eta \vec{v}_c$	Сила сопротивления среды по Стоксу
$\vec{F}_{2c} = -c_c \frac{\rho_0 S_c}{2} v_c \vec{v}_c$	Сила лобового сопротивления по Ньютону

Здесь $\rho_c = M/V_c$ — средняя плотность стержня; $V_c = \pi D^2 L/4$ — объем стержня; v_c — линейная скорость средней точки части стержня между осью и верхней частью сферы; $S_c = DL$ — площадь поперечного движению сечения для стержня. Так как стержень стальной, то сила Архимеда мала по сравнению с силой тяжести, но оставлена для симметрии записи. Чему равен коэффициент μ_c , зависящий от геометрии, для цилиндра, движущегося таким образом, нам неизвестно. Опыт показывает, что сила $\vec{F}_{1c}$ намного меньше, чем $\vec{F}_{2c}$ и видимо, $\vec{F}_{1ш}$, так как диаметр стержня меньше диаметра сферы. В расчетах она не будет учтена. Для круглого цилиндра, продуваемого перпендикулярно образующей при $L/D > 40$, что соответствует нашим параметрам, коэффициент $c_c = 1,20$ [36]. Изменение линейной скорости вдоль стержня поперечно движению также будет учтено при расчете момента этой силы.

Исходим из основного уравнения динамики вращательного движения тела вокруг оси:

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_{m\vec{g}} + \vec{M}_{\vec{F}_{3ш}} + \vec{M}_{M\vec{g}} + \vec{M}_{\vec{F}_{3c}} + \vec{M}_{\vec{F}_{1ш}} + \vec{M}_{\vec{F}_{2ш}} + \vec{M}_{\vec{F}_{1c}} + \vec{M}_{\vec{F}_{2c}} \quad (3)$$

и стандартных определений:

$$\frac{d\varphi}{dt} \vec{k} = \vec{\omega}, \quad \vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{l}], \quad \vec{M}_{\vec{F}} = [\vec{l}, \vec{F}],$$

где $\vec{k}$ — единичный вектор вдоль оси OZ ; $\vec{\omega}$ — угловая скорость; $\vec{l}$ — радиус-вектор, проведенный от оси вращения в точку приложения силы; $\vec{M}_{\vec{F}}$ — момент соответствующей силы. Моменты всех сил реакции равны $\vec{M}_{\vec{N}} = 0$ из-за перпендикулярности сил и радиус-векторов, поэтому в (3) не указаны.

Момент инерции системы равен

$$I = I_c + I_{0ш} + m_{ш} \left(L - \frac{d_2}{2} \right)^2 + I_{\text{призмы}} + I_{\text{смартфона}}, \quad (4)$$

где первое слагаемое — момент инерции стержня, второе и третье — для сферы с учетом теоремы Гюйгенса–Штейнера (Jakob Steiner, 1796–1863), четвертое и пятое — моменты инерции призмы и смартфона. Два последних слагаемых можно не учитывать из-за их малости, хотя при численных расчетах они сохранены. По очевидным причинам следует ограничить диаметр шара $d_2 \leq L$.

После определения моментов сил с учетом распределения скорости по длине стержня и диаметру сферы путем интегрирования (эти расчеты здесь не приводятся, а смысл операции понятен из рис. 4.2), получаем

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\delta \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{\varphi_2} \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| \frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0. \quad (5)$$

Имеем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, однородное, с постоянными коэффициентами, нелинейное из-за синуса угла и квадрата угловой скорости. От обычного уравнения маятника оно отличается третьим слагаемым, которое и играет основную роль при затухании.

В (5) использованы дополнительные обозначения для декремента затухания δ и собственной циклической частоты колебаний ω_0 (не путать с угловой скоростью):

$$2\delta = \frac{\eta}{I} \left[3\pi d_2 \left(L - \frac{d_2}{2} \right)^2 + \mu_c \left(\frac{L - d_2}{2} \right)^2 \right], \quad (6)$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{I} \left[m \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{ш}} \right) \left(L - \frac{d_2}{2} \right) + M \left(\frac{L}{2} - \frac{\rho_0}{\rho_c} \cdot \frac{L - d_2}{2} \right) \right], \quad \omega_0 = \sqrt{|\omega_0^2|} = \frac{2\pi}{T_0}, \quad (7)$$

где T_0 — собственный период. Заметим, что величина ω_0^2 может быть как больше, так и меньше 0 (колебания снизу точки подвеса — обычные, и сверху от точки подвеса — если очень плотная среда).

$$\frac{1}{\varphi_2} = \frac{\rho_0}{2I} \left[c_{ш} \pi R^5 \left[\frac{3}{4} \left(\frac{L}{R} - 1 \right) + \left(\frac{L}{R} - 1 \right)^3 \right] + \frac{c_c D}{4} (L - d_2)^4 \right], \quad (8)$$

где φ_2 — характерный угол, при котором только под действием силы $\vec{F}_2$ скорость уменьшилась бы в e раз.

Вряд ли такое уравнение может быть решено аналитически, поэтому применялись численные методы с начальными условиями

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0, \quad \omega_z|_{t=0} = \omega_{z0}. \quad (9)$$

4. Экспериментальная часть

Авторами были опробованы разные варианты проведения опытов. В первом опыте (рис. 5.1): шарик $m = 101$ г, $d = 30$ мм, легкий алюминиевый стержень (спица) $L = 180$ мм, $D = 2,5$ мм, градусная шкала со стрелкой, в точке подвеса подшипник качения [37].

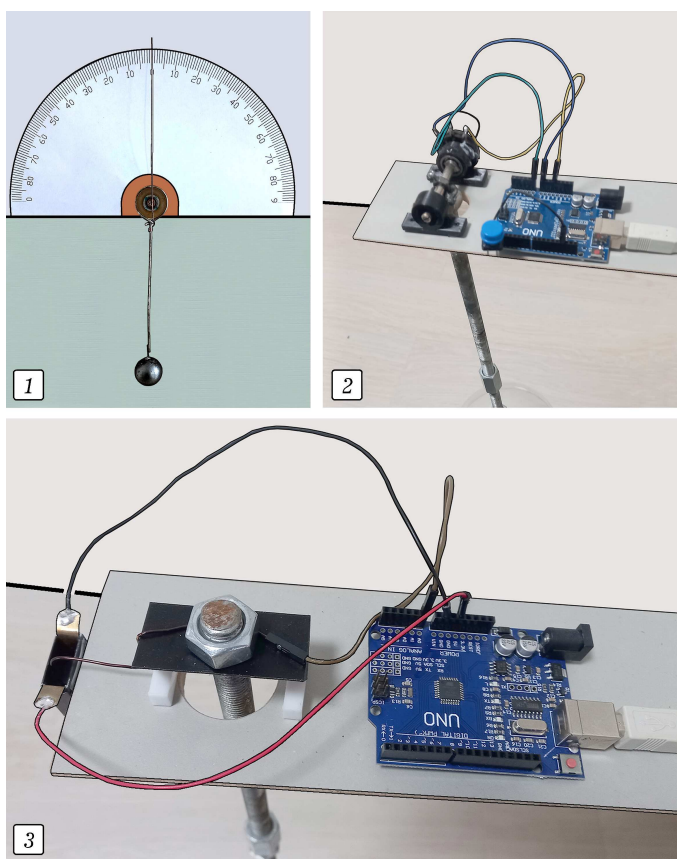


Рис. 5. Элементы экспериментальных установок: 1 — эксперимент в воде; 2 — резисторный датчик; 3 — жидкостный датчик

Колебания происходят в воде с видеофиксацией положения маятника на смартфон и последующей ручной покадровой обработкой видео с точностью до 0,01 с и углов отклонения с точностью 1°. В воде получаются вполне приемлемые результаты, но для воздуха такая установка не подходит из-за значительной силы трения в оси. В случае замены подшипника на призму становится возможным проводить измерения в воздухе, но обработка видео требует значительных затрат времени и достаточно сложна для автоматического получения угловой зависимости в реальном времени. Другой вариант с использованием модифицированного резистивного датчика, ось вращения которого была установлена на подшипники качения (рис. 5.2) также не дал желаемого результата в связи с затуханием из-за трения в подвижном контакте и в подшипниках, которое оказалось весьма значительным для маятника в воздухе.

Далее опыты проводились с другим маятником (глобус, оклеенный фольгой) (рис. 6.1), о параметрах которого ниже.

Меньшее дополнительное затухание возникает в жидкостном потенциометрическом датчике (рис. 5.3) [38, с. 27]. Однако движение подвижного электрода (провода) в воде вызывает ее колебания и вносит дополнительную погрешность в измерения. Кроме того, дополнительно проведенный эксперимент показал, что при подключении такого датчика время практически полного затухания колебаний уменьшается с 15 мин до 10 мин, что свидетельствует о сравнимости сил сопротивления, действующих на сферу в воздухе, с силами сопротивления, действующими на подводный электрический провод и проволоку в воде. В итоге мы остановились на доступных бесконтактных способах.

В одном из вариантов смартфон с предварительно установленным приложением «*PhyPhox*», вкладка «Измерение угла» закреплялся на призме, как показано на рис. 6.2 [39]. В процессе записи данные графически отображаются на экране. По завершению измерений указанное приложение позволяет произвести экспорт данных в формате *MS Excel* для дальнейшей обработки либо в табличный процессор, либо в среду *Mathcad*. Параметры смартфона, как будет показано ниже, таковы, что его момент инерции сравнительно незначительный. В качестве недостатка следует отметить достаточно большой шаг по времени — 0,5 с, уменьшить который невозможно из-за отсутствия таких настроек в приложении.

В следующем варианте установка реализована с использованием платы *Arduino Uno* [40] (рис. 6.3). Для определения угла отклонения маятника и времени используется датчик Холла, закрепленный на платформе 2 и постоянный магнит, закрепленный на призме 1. Запуск считывания данных производится кнопкой 3. Перед измерениями необходимо произвести градуировку установки, отклоняя маятник на фиксированные углы.

Также был опробован еще один вариант датчика положения, основанный на измерении интенсивности отраженного от поляризационной

пленки, прикрепленной к призме, поляризованного света с помощью фотодиода и платы Ардуино [41] (рис. 6.4). Как и в случае с датчиком Холла, требуется предварительная градуировка установки. Последние два варианта вполне приемлемы и дают похожие результаты.

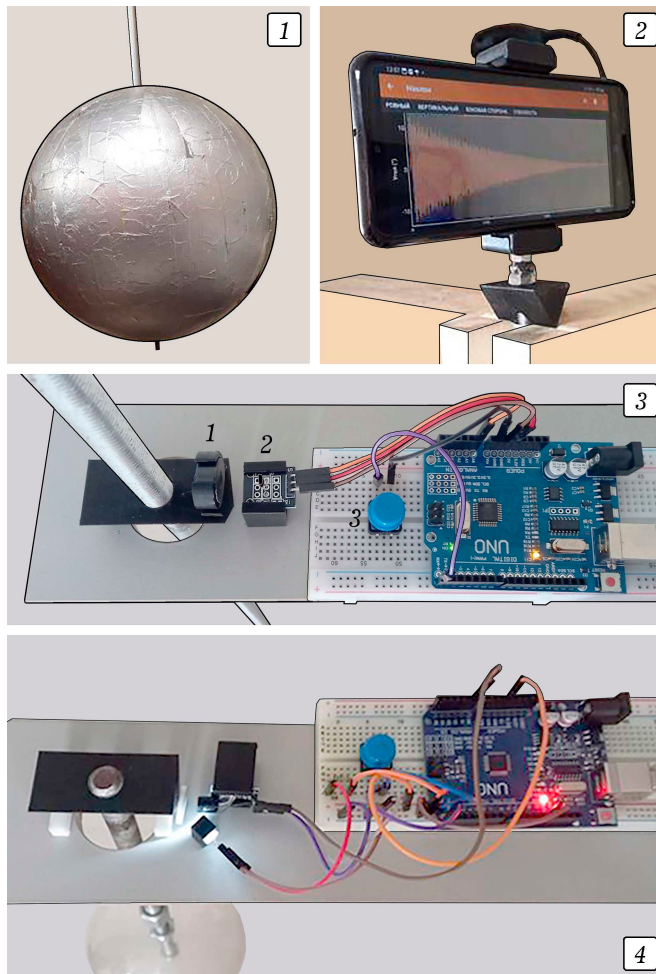


Рис. 6. Элементы экспериментальных установок: 1 — сфера на стержне; 2 — смартфон с приложением; 3 — модель установки с параллельным расположением магнита; 4 — модель установки с поляризованным светом

5. Сравнение эксперимента и теории

В натурном и численном эксперименте использовались следующие параметры. Сфера: $m = 0,920$ кг, $d_2 = 0,343$ м, $d_1 = 0,335$ м, $c_{ш} = 0,47$. Стержень (две соединенные удлиненной гайкой малой массы

стандартные шпильки): $M = 1,426$ кг, $L = 1,955$ м, $D = 0,012$ м, $c_c = 1,20$. Среда (воздух при 20°C): $\rho_0 = 1,199$ кг/м³, $\eta = 0,0000182$ Па·с. Смартфон: $m_{\text{см}} = 0,213$ кг, размеры $a \times b \times h = 0,160 \times 0,073 \times 0,009$ м, расстояние от центра масс смартфона до оси вращения $l_{\text{см}} = 0,09$ м, $c_{\text{см}} = 1,1$.

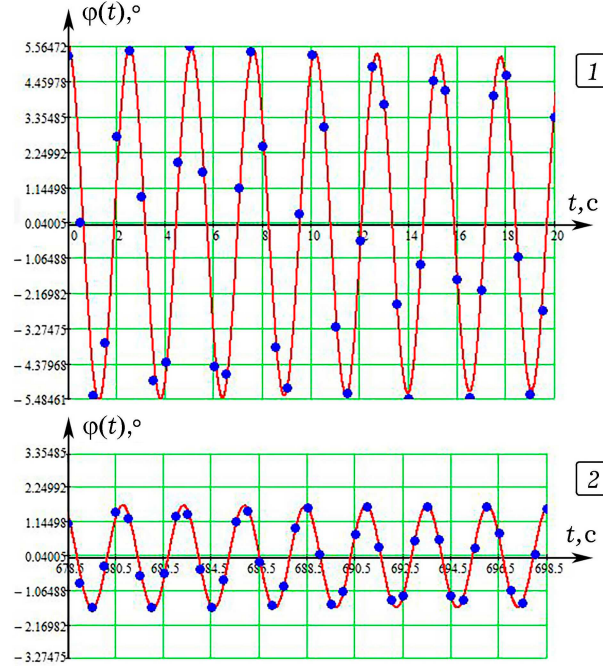


Рис. 7. Зависимость угла отклонения от времени $\varphi(t)$ в начале 1 и конце 2 эксперимента (сплошная линия — численные расчеты, точки — эксперимент)

Авторы проводили эксперименты с различными сферами и стержнями, но во всех случаях разница между экспериментом и теорией не превышала 6%. Далее приведены результаты наиболее удачного эксперимента. При таких параметрах моменты инерции сферы, стержня и смартфона: $I_{\text{сф}} = 2,944$ кг·м², $I_{\text{ст}} = 1,817$ кг·м², $I_{\text{см}} = 0,00227$ кг·м². Таким образом, учет влияния смартфона является превышением точности.

Начальный угол отклонения $\varphi_0 = 5,57^\circ$, начальной скорости ω_{z0} нет. При больших углах отклонения стержень уже начинает изгибаться, что нарушает условия задачи. Кроме того, в процессе возникают относительно небольшие несимметричные ($\approx 4\%$) колебания в перпендикулярной плоскости (10), связанные с отклонением установки от вертикали на угол около $1,5^\circ$, избежать которых полностью не удастся:

$$\frac{\varphi_{\perp \max}}{\varphi_{\parallel \max}} = \frac{1,64^\circ - 1,41^\circ}{5,57^\circ} = 0,0397 \approx 4\%. \quad (10)$$

Длительность экспериментов составляла порядка 700 с, поэтому при периоде колебаний $T = 2,54$ с полностью привести график зависимости $\varphi(t)$ не представляется возможным. На рис. 7.1 и рис. 7.2 показано сравнение численного и реального эксперимента в начале и конце процесса. Расчеты проводились в среде *PTC Mathcad*.

Из графиков видно, что совпадение очень хорошее. Численное «включение–выключение» сил сопротивления показало, что основную роль играет сила, квадратично зависящая от скорости.

В работе [42] была определена, правда, только для прямолинейного движения, безразмерная величина b , связывающая параметры тела (шара) и среды (11). Она же является критерием для выяснения, какая из сил сопротивления оказывает большее влияние. Если $b \gg 1$, то доминирует сила, квадратично зависящая от скорости. Если $b \ll 1$, то основную роль играет сила, пропорциональная первой степени скорости. При наших параметрах этот критерий имеет значение

$$b = \frac{c_{\text{ш}} \rho_0 (\rho - \rho_0) g d_2^3}{108 \eta^2} = \frac{0,47 \cdot 1,199 \cdot (43,5 - 1,199) \cdot 9,814 \cdot 0,343^3}{108 \cdot 1,82^2 \cdot 10^{-10}} \approx 2,6 \cdot 10^8. \quad (11)$$

Аналогичный по смыслу результат дает и примерный критерий Рейнольдса (Osborne Reynolds, 1842–1912), как отношение сил. При оценочной скорости в нижней точке

$$v_{\text{max}} = \sqrt{2g \left(L - \frac{d_2}{2} \right) (1 - \cos \varphi_0)} = 0,40 \text{ м/с} \quad (12)$$

он получается равным

$$\text{Re}_{21} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{c_{\text{ш}} \rho_0 d_2 v_{\text{max}}}{24 \eta} = \frac{0,47 \cdot 1,199 \cdot 0,343 \cdot 0,40}{24 \cdot 1,82 \cdot 10^{-5}} \approx 180. \quad (13)$$

Число Рейнольдса в классическом понимании при этом равно

$$\text{Re} = \frac{\rho_0 d_2 v_{\text{max}}}{\eta} = \frac{1,199 \cdot 0,343 \cdot 0,40}{1,82 \cdot 10^{-5}} \approx 9180, \quad (14)$$

что свидетельствует о незаметном на глаз, но уже сильно турбулентном движении.

Подводя итог, можно сказать, что совпадение теоретических расчетов и эксперимента при заданных параметрах очень хорошее, поставленная задача решена, и основную роль играет сила сопротивления по Ньютону. Заметим, что коэффициенты лобового сопротивления — достаточно индивидуальные величины для каждого тела, и здесь использованы наиболее широко применяемые значения.

6. Виртуальная часть. Программа моделирования

Для исследовательских и демонстрационных целей, а также для лабораторного практикума авторами было написано *Windows*–приложение [43, 44], вид главного окна которого представлен на рис. 8.

Программа написана на простом, слегка устаревшем, но вполне достаточном для этих целей языке *Visual Basic* в среде программирования *Microsoft Visual Basic 6.0*, которая, что немаловажно, бесплатна для образовательных учреждений. Продукт имеет интуитивно понятный, дружелюбный русскоязычный интерфейс и располагает справочными материалами по теории, таблицей плотности и вязкости сред, биографическими данными ученых.

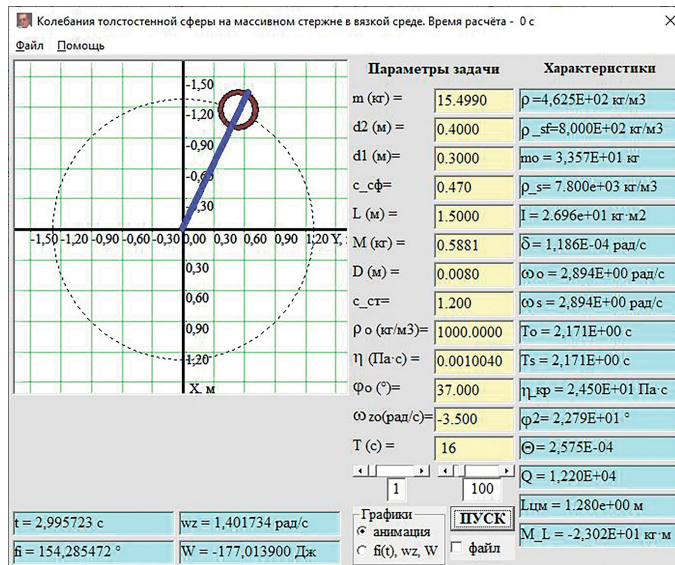


Рис. 8. Главное окно Windows-приложения

Большое количество параметров позволяет смоделировать достаточно разные реальные системы, в том числе и довольно экзотические, трудно реализуемые на практике. Так на рис. 8 большая сфера из стали с толщиной стенок 5 мм на полутораметровом стержне колеблется в воде. Средняя плотность меньше плотности воды, поэтому запущенный при небольшом отклонении от нижнего положения равновесия с начальной скоростью маятник будет с затуханием колебаться вблизи верхней точки. Также программа позволяет смоделировать и вращательное движение.

Кроме окна анимации движения можно показать зависимости $\varphi(t)$, угловой скорости $\omega_z(t)$ и энергии $W(t)$ от времени (рис. 9).

7. Заключение

Авторы считают, что задача, поставленная в начале публикации, выполнена полностью. Удалось предложить и описать несколько вариантов экспериментальной установки, которые не так уж сложно реализовать на практике.

Сравнение теории и эксперимента показало количественное совпадение с точностью около 6%, что следует признать вполне хорошим результатом, тем более что коэффициенты лобового сопротивления различные для каждого конкретного шара и стержня.

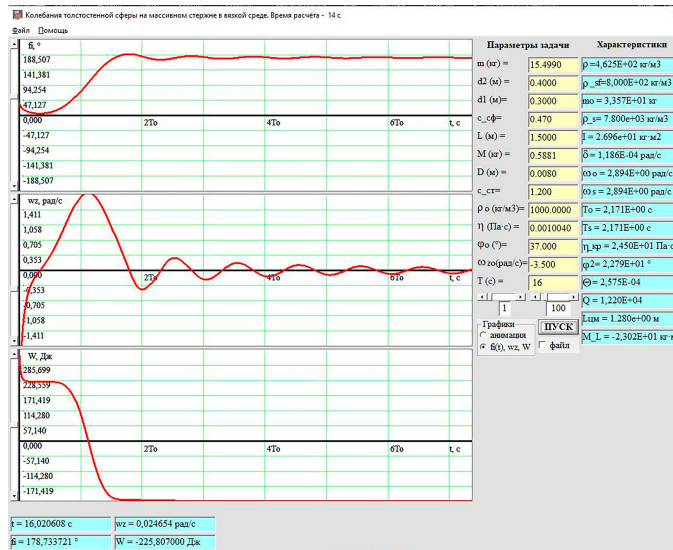


Рис. 9. Зависимости $\varphi(t)$, $\omega_z(t)$, $W(t)$

Предложенная программа моделирования может быть использована для дальнейшего уточнения и развития теории и исследований, а также уже применяется в качестве виртуального демонстрационного эксперимента и в лабораторном практикуме.

Большой список литературы позволяет читателю обратиться непосредственно к первоисточникам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лагин Л.И. Старик Хоттабыч. Повесть-сказка / М.: Детгиз, 1958. — 272 с. — URL: <https://azbyka.ru/fiction/starik-hottabych-lazar-lagin/4/> (дата обращения 15.03.2025).
2. Morton W. Scott and Charlton M. Lewis. China: Its History and Culture / New York: McGraw-Hill, Inc., 2005. — 368 pp. — URL: <https://zlib.pub/download/china-its-history-and-culture-2dm7ld0p4390?hash=f5ff5d2723697950436b600ba9cfdaaa> (дата обращения 15.03.2025).
3. A replica of an ancient Chinese Seismograph from Eastern Han Dynasty (25–220 CE). This picture is taken from an exhibition at Chabot Space & Science Center in Oakland, California. — URL: <https://commons.wiki media.org/wiki/File:EastHanSeismograph.JPG> (дата обращения 15.03.2025).
4. Newton, Roger G. Galileo's Pendulum: From the Rhythm of Time to the Making of Matter // US: Harvard University Press, 2004. — URL: <https://archive.org/details/galileospendulum0000newt/page/52/mode/2up> (дата обращения 15.03.2025).
5. King D.A. Ibn Yunus and the pendulum: a history of errors // Arch. Internat. Hist. Sci. 29 (104), 1979. — pp. 35–52. — URL: <https://muslimheritage.com/ibn-yunus-and-the-pendulum-a-history-of-errors/> (дата обращения 15.03.2025).

6. Соболев Д. А. Идея полета в трудах Леонардо да Винчи // «Вопросы истории естествознания и техники». — 2005. — Т. 26. — № 3. — С. 57-69. — URL: <https://vietmag.org/s0205-96060000622-1-1-gu-345/> (дата обращения: 15.03.2025).
7. Галилео Галилей. Избранные труды в двух томах. Т.2. — М.: Наука, 1964. — 570 с. — URL: <https://djvu.online/file/NQPrLTX3PRlsn> (дата обращения: 15.03.2025).
8. Гюйгенс Х. Три мемуара по механике. — М.: Изд. АН СССР, 1951. — URL: <https://djvu.online/file/KJS8u0hv2P8jZ> (дата обращения: 15.03.2025).
9. Арнольд В. И. Устойчивость перевернутого маятника и швейная машинка Капицы // Математическое понимание природы. — М.: МЦНМО, 2009. — URL: https://etudes.ru/.data/localdocs/EtudesRu_Arnold_Britva.pdf (дата обращения: 15.03.2025).
10. Московский Планетарий. Лунариум. Маятник Фуко. — URL: <https://rutube.ru/video/50b60c4bac9fc6ec97d6470a0ad73496/> (дата обращения: 15.03.2025).
11. Edme Mariotte, Traite de la percussion ou choc des corps (Трактат о сотрясении или ударе тел), 1673. — URL: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k9692103z/f139.item.zoom#> (дата обращения: 15.03.2025).
12. Newton's cradle. — URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_cradle (дата обращения: 15.03.2025).
13. Yo-yo. — URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Yo-yo> (дата обращения: 15.03.2025).
14. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Учеб. пособие: Для вузов. В 5 т. Т. I. Механика. — М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2005. — 560 с. — URL: <https://djvu.online/file/jy9vfpJ-lAMWTT> (дата обращения: 20.03.2025).
15. Мякишев Г. Я. Физика: 11-й класс: базовый и углубленный уровни: учебник / Г. Я. Мякишев, Б. Б. Буховцев, В. М. Чаругин; под редакцией Н. А. Парфентьевой. — Москва: Просвещение, 2024. — 432 с. — URL: <https://e.lanbook.com/book/408689> (дата обращения: 20.03.2025).
16. Эдгар По, Стихотворения. Проза. — М.: Изд-во «Худ. лит.», 1976. — URL: <https://lib.ru/INOFAnt/POE/kolodec.txt> (дата обращения: 15.03.2025).
17. Hermann Hesse, Der Steppenwolf // Издание на русском языке AST Publishers, 2016. — URL: <https://www.litres.ru/book/german-gesse/stepnoy-volk-138905/chitat-onlayn/> (дата обращения: 15.03.2025).
18. Сафулина Р. М. Образ маятника в поэзии Н. С. Гумилева // Филологические науки. Вопросы теории и практики. — Тамбов: Грамота. — 2018. — № 4(82). — ч. 2. — С. 271. — URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/obraz-mayatnika-v-poezii-n-s-gumileva> (дата обращения: 20.03.2025).
19. Симонова О. А. Символика часов в лирике И. Ф. Анненского в контексте литературной традиции // Мифологические образы в литературе и искусстве. — М.: Индрик, 2015. — С. 228–251. — URL: <https://www.academia.edu/29536732/> (дата обращения: 15.03.2025).
20. Бальмонт К. Д. Маятник. — URL: <https://www.culture.ru/poems/32181/mayatnik> (дата обращения: 02.04.2025).
21. Мандельштам О. Э. Кухня. — Л.: Радуга, 1926. — URL: <http://mandelshtam.lit-info.ru/mandelshtam/stihi/detyam/stih-536.htm> (дата обращения: 02.04.2025).
22. Лаврова Г. Маятник жизни. — URL: <https://galinalavrova.ru/mayatnik-zhizni/> (дата обращения: 02.04.2025).
23. Стихи про маятник. — URL: <https://pogovorka.com/poems/pro-mayatnik> (дата обращения: 02.04.2025).
24. Метнер Н. К. Бессонница, романс на слова Ф. Тютчева. — URL: <https://mus.academy/articles/o-zvukopisnykh-elementakh-muzykalnogo-yazyka-v-vokalnoy-lirike-nikolaya-metnere> (дата обращения: 02.04.2025).
25. Тарнопольский В. Маятник Фуко. — URL: https://vk.com/wall-23051943_518 (дата обращения: 02.04.2025).
26. Album Reviews: Creedence Clearwater Revival — Pendulum (англ.) // Cashbox: magazine. — New York: The Cash Box Publishing Co. Inc., 1970. — 19 December (vol. 32, no. 26). — P. 79. — URL: https://archive.org/details/cashbox32unse_18/page/78/mode/2up (дата обращения: 27.05.2025).
27. Антонио Переда-и-Сальгадо, Натюрморт с маятником. 1652 г. // Музей изобразительных искусств имени А. С. Пушкина, Москва. — URL: <https://portrets.ru/natyurmort/pereda-antonio/natyurmort-s-mayatnikom.html> (дата обращения: 02.04.2025).
28. Петров-Водкин К. С. Тревога. — URL: https://rusmuseumvrm.ru/data/collections/painting/19_20/zh-1269/index.php (дата обращения: 02.04.2025).

29. Bjoern Kirsch. — URL: <https://urlebird.com/user/bjoernkirsch/> (дата обращения: 02.04.2025).
30. Вебстер Ричард. Маятник для начинающих. — М.: ФАИР-ПРЕСС, 1999, 2003. — URL: <https://www.ezobox.ru/media/download/webster-richard-mayatnik-dlya-nachinaushih.751.pdf> (дата обращения: 02.04.2025).
31. Монахов В.В., Огинец О.В. Исследование колебаний маятника в поле силы тяжести: Учебно-методическое пособие. — СПб: Издательство СПбГУ, 2006. — 24 с. — URL: <https://cph.phys.spbu.ru/documents/Second/pendulum2006.pdf> (дата обращения: 02.04.2025).
32. Фаддеев М.А., Масленникова Ю.В. Исследование колебаний математического маятника // Физика в школе. — 2024. — № 4. — С. 21–28.
33. Фаддеев М.А. Исследование затухания колебаний математического маятника // Проблемы учебного физического эксперимента: Сборник научных трудов. Выпуск 39. — М.: ИСРО РАО, 2024. — С. 92–94.
34. Путилов К.А. Курс физики: В 3 т. Т. 1. Механика. Акустика. Молекулярная физика. Термодинамика. — М.: ГИ ФМЛ, 1963. — 560 с. — URL: <https://archive.org/details/B-001-014-360/page/4/mode/2up> (дата обращения: 22.03.2025).
35. Коэффициент лобового сопротивления. — URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Drag_coefficient (дата обращения: 22.03.2025).
36. Коэффициент лобового сопротивления кирпича. — URL: <https://stroiteh-msk.ru/foto/koefficient-lobovogo-soprotivleniya-kirpicha.html> (дата обращения: 22.03.2025).
37. Бобылев Ю.В., Грибков А.И., Романов Р.В. Демонстрация и графический анализ затухающих колебаний простого маятника // Вестник ГОУ ДПО ТО «ИПК и ППРО ТО». Тульское образовательное пространство. — 2023. — № 3/2. — С. 81–84. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=54895313> (дата обращения: 22.03.2025).
38. Вараксина Е.И., Рудин А.С. Формирование умений компьютерного исследования механических колебаний: Учебное пособие / Под ред. В.В. Майера. — Глазов: ГГПИ, ООО «Глазовская типография», 2012. — 64 с.
39. Грибков А.И., Романов Р.В. Исследование затухающих колебаний с помощью arduino и смартфона // Физико-математическое образование: традиции, инновации, перспективы: материалы II Междунар. науч.-практ. конф., г. Минск, 24–25 октября 2024 г. — Минск: БГПУ, 2024. — С. 142–145. — URL: https://imath.bspu.by/admin-panel/vendor/kcfinder/upload/files/Prepods/Наука/Физико_математическое_образование_2024.pdf (дата обращения: 27.05.2025).
40. Грибков А.И., Романов Р.В. Измерение периода колебаний маятника с использованием модуля датчика Холла Ардуино // Информационные и инновационные технологии в науке и образовании: сборник научных трудов / отв. ред. Е.С. Арапина–Арапова. — Ростов-на-Дону: Издательско-полиграфический комплекс РГЭУ (РИНХ), 2025. — С. 440–442. — URL: https://drive.google.com/file/d/1OtUCEOJxG57drRs3low_UD-vvdLMmcUG/view (дата обращения: 27.05.2025).
41. Грибков А.И., Романов Р.В. Визуализация затухающих колебаний физического маятника с использованием поляризованного света // Проблемы учебного физического эксперимента: Сборник научных трудов. Выпуск 41. — М.: ИСРО РАО, 2025 — С. 91–93.
42. Бобылев Ю.В., Грибков А.И., Романов Р.В. О сочетании аналитических и численных методов при решении физических задач // Инновации в образовании. — 2018. — № 11. — С. 115–126. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36356228> (дата обращения: 17.05.2025).
43. Романов Р.В. Колебания толстостенной сферы на массивном стержне в вязкой среде // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024680934. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 03.09.2024. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=69598224> (дата обращения: 17.05.2025).
44. Грибков А.И., Романов Р.В. Виртуальное моделирование колебаний реального маятника // Материалы XXIII Международной конференции, посвященной 80-летию профессора Александра Ивановича Галочкина и 75-летию профессора Владимира Григорьевича Чирского. Тула, 2024. — С. 224–227.

Тульский государственный
педагогический университет
им. Л. Н. Толстого

Поступила в редакцию 27.05.25.