Научная статья
ББК 74.262.23
УДК 534.13

А. А. Сабирзянов

КУКЛА–НЕВАЛЯШКА КАК КОЛЕБАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА

Использована простейшая модель куклы–неваляшки — диск с маленьким грузом. Рассмотрены колебания диска с грузом при различном положении груза. Если груз закреплен не на ободе, колебания являются гармоническими. Если груз закреплен на ободе, колебания не являются гармоническими, а их частота зависит от амплитуды.

Ключевые слова: кукла–неваляшка, парадокс обруча, обруч с грузом, циклоида, гармонические колебания.

A. A. Sabirzyanov

TUMBLER DOLL AS AN OSCILLATORY SYSTEM

The simplest model of a tumbler doll is used as a disk with a small load. Vibrations of a disk with a load at different positions of the load are considered. If the load is not attached to the rim, the vibrations are harmonic. If the load is fixed to the rim, the vibrations are not harmonic, and their frequency depends on the amplitude.

Keywords: tumblerdoll, hoop paradox, hoop with load, cycloid, harmonic oscillations.

Кукла–неваляшка или ванька–встанька (рис. 1.1) — известная старинная игрушка. С точки зрения физики она является разновидностью колебательной системы или осциллятора.

Устройство неваляшки бывает различным. Чаще всего она имеет шарообразное основание и внутренний груз. Форма верхней части не имеет значения. Центр тяжести всей системы расположен ниже центра кривизны основания.

Учебная физика. 2024. № 1. С. 27–32

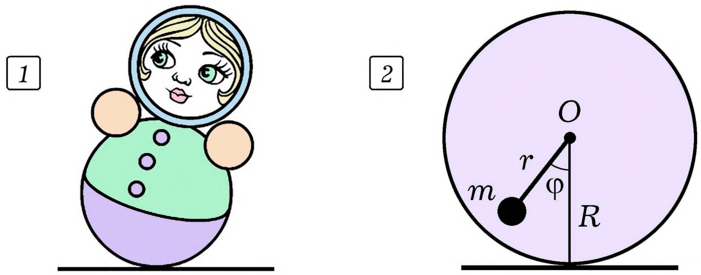

Рис. 1. Кукла–неваляшка и ее простейшая модель

Будем использовать простейшую модель неваляшки (рис. 1.2): груз массой m закреплен на невесомом диске радиусом R на расстоянии r от центра O диска. Диск может катиться по горизонтальной поверхности без проскальзывания. Величиной, определяющей положение системы (обобщенной координатой), будет угол φ между вертикалью и диаметром диска, проходящим через груз.

1. Малые колебания диска с грузом при $r < R$

Найдем циклическую частоту малых колебаний диска вблизи положения равновесия.

Скорость любой точки диска, в том числе груза, при качении можно представить в виде векторной суммы скоростей поступательного и вращательного движения. В тот момент, когда груз проходит через положение равновесия ($\varphi = 0$), обе эти скорости направлены противоположно друг другу.

Скорость поступательного движения по модулю равна ΩR, где Ω — угловая скорость диска. Скорость вращательного движения груза по модулю равна Ωr. Полная скорость груза в данный момент направлена горизонтально и по модулю равна:

$$v = \Omega R - \Omega r = \Omega(R - r). \tag{1}$$

Так как угловая скорость равна производной угла по времени (что обозначено точкой сверху) $\Omega = \dot{\varphi}$, кинетическую энергию груза можно записать:

$$E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\Omega^2(R-r)^2}{2} = \frac{m\dot{\varphi}^2(R-r)^2}{2}.$$

При угле φ, близком к нулю, можно считать:

$$\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}.$$

Следовательно, потенциальная энергия груза относительно его нижнего положения равна:

$$E_{\text{п}} = mgh = mgr(1 - \cos\varphi) = \frac{mgr\varphi^2}{2}.$$

Здесь h — высота, на которую поднялся груз; g — ускорение свободного падения.

Будем считать потери на трение пренебрежимо малыми. Тогда, согласно закону сохранения механической энергии:

$$E_{\text{к}} + E_{\text{п}} = \frac{m\dot{\varphi}^2(R-r)^2}{2} + \frac{mgr\varphi^2}{2} = \text{const}.$$

Уравнения такого типа, связывающие квадрат скорости с квадратом координаты, могут быть получены для множества осцилляторов. Известно, что их решением являются гармонические функции (sin или cos). Поэтому можно считать, что $\varphi(t)$ выражается аналогичным законом.

Максимальные значения кинетической и потенциальной энергии равны друг другу:

$$\frac{m\dot{\varphi}^2_{\max}(R-r)^2}{2} = \frac{mgr\varphi^2_{\max}}{2}. \tag{2}$$

По известному свойству гармонических функций $\dot{\varphi}_{\max} = \omega\varphi_{\max}$, где ω — циклическая частота колебаний. После подстановки этого соотношения в (2) и преобразований получаем циклическую частоту малых колебаний диска:

$$\omega = \frac{\sqrt{gr}}{R-r}. \tag{3}$$

На рис. 2 показан график зависимости $\omega(r)$, построенный по формуле (3) при $R = 10$ см, $g = 10$ м/с^2. Видно, что начальный участок примерно до $R/2$ близок к линейному, далее при $r \to R$ рост циклической частоты ускоряется и она увеличивается вплоть до $\omega \to \infty$. Очевидно, для $r = R$ формулу (3) использовать нельзя. Этот случай требует отдельного рассмотрения.

2. Малые колебания диска с грузом при $r = R$

На рис. 3 для сравнения между собой изображены траектории груза при $r = R$; $r = 0,8R$; $r = 0,6R$, числовое значение выбрано тем же ($R = 10$ см). Траектории построены по формулам:

$$x = R\varphi - r\sin\varphi;\ \ y = R - r\cos\varphi.$$

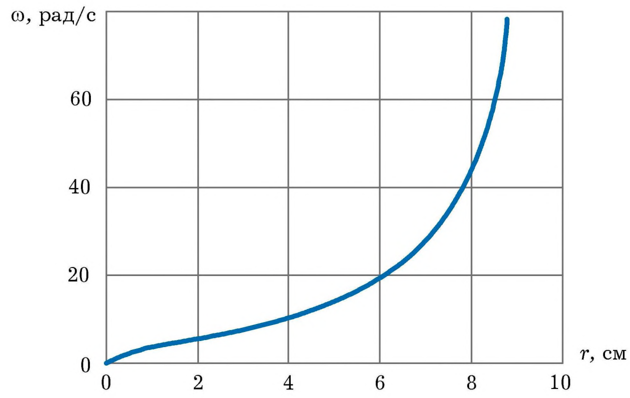

Рис. 2. Зависимость частоты от расстояния до центра

Кривая ($r = R$) называется *циклоидой*, кривые ($r < R$) — «укороченными циклоидами» [1]. Точка $x = 0$ на графике — точка, в которой груз при $r = R$ касается опоры.

Направление скорости груза определяется касательной к соответствующей траектории в соответствующей точке. Траектории ($r < R$) имеют в точке $x = 0$ минимум пологой формы, поэтому скорость в этой точке направлена горизонтально. Мы видим в точке $x = 0$ «потенциальную яму», типичную для различных осцилляторов.

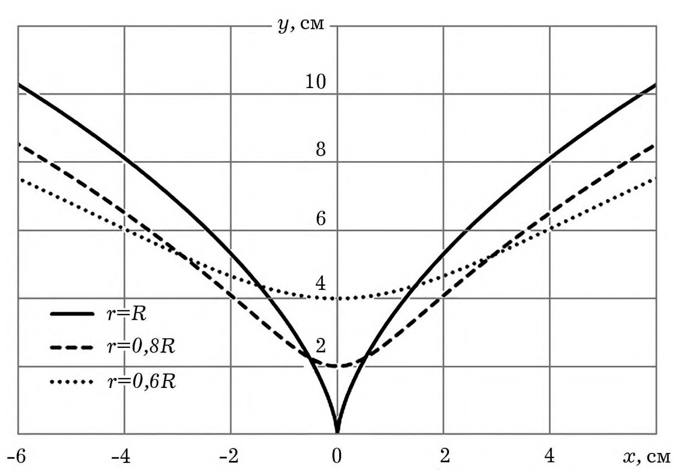

Рис. 3. Траектории груза при различных расстояниях от него до центра

Траектория ($r = R$) пологого минимума не имеет, что видно по рис. 3. В этом случае в окрестности точки $x = 0$ скорость направлена по вертикали. То, что горизонтальная составляющая скорости груза в точке равна нулю, видно также из (1).

Случай $r = R$ разобран в [2]. С решением можно ознакомиться по данному источнику, поэтому не будем приводить его полностью. Основные результаты таковы: при малых колебаниях невесомого обруча прикрепленная к нему материальная точка движется с ускорением свободного падения g, в момент прохождения через положение равновесия направление движения точки изменяется на противоположное. То есть материальная точка в этом случае ведет себя как упругий шарик, подскакивающий над массивной горизонтальной плитой.

В [2] получена формула для периода колебаний обруча с материальной точкой:

$$T = 4\varphi_0\sqrt{\frac{R}{g}},$$

где φ_0 — угол (в радианах), на который диаметр обруча, проходящий через материальную точку, отклонен в начальный момент от вертикали.

Даже малые колебания такой системы не являются гармоническими, а их период, как мы видим, зависит от начального угла (амплитуды) φ_0. При $\varphi_0 \to 0$ период $T \to 0$, следовательно, циклическая частота $\omega \to \infty$, что сходится с результатом, полученным в пункте 1.

3. Поведение диска с грузом при $r = R$ при больших углах отклонения

Согласно литературным источникам, интересным выглядит поведение диска (или обруча) с грузом, закрепленным на ободе, при больших углах отклонения. В [3] отмечено: если обруч с грузом катится, начиная от положения груза в верхней точке, то «движение эквивалентно гладкому скольжению массы под действием силы тяжести по циклоиде, которую масса описывает, и тогда ясно, что рано или поздно масса должна покинуть эту траекторию»; «обруч подскакивает, когда радиус-вектор массы становится горизонтальным». Автор, известный математик Дж. Литлвуд, имеет в виду, что при скольжении с верхней точки по выпуклой гладкой поверхности, имеющей форму циклоиды, груз в точке $\varphi = 90^\circ$ оторвется от поверхности, а значит, и обруч с грузом вблизи этой точки не должен катиться без проскальзывания. Вблизи этой точки обруч будет либо проскальзывать, либо подпрыгивать.

В [3] данная тема затронута, возможно, впервые, но кратко. В других источниках она рассмотрена подробнее, например, [4]. Задача с аналогичным содержанием («Обруч с грузом») предлагалась на Турнире юных физиков в 2014 г. Наконец, на эту тему образовательным каналом *GetAClass* снят и выложен в январе 2024 г. видеоролик «Парадокс обруча» [5]. В этом ролике показано в эксперименте, что обруч с грузом в определенных режимах может проскальзывать или подпрыгивать над опорой.

Полное теоретическое обоснование поведения такой системы является, по-видимому, весьма сложным.

Заключение

1. Теоретически рассмотрена простейшая модель неваляшки в виде маленького груза, закрепленного на легком диске, который может катиться по горизонтальной поверхности.

2. Показано, что если груз закреплен в любой точке между центром и ободом, колебания устройства при малых амплитудах являются гармоническими.

3. Если малый груз закреплен на ободе, то даже малые колебания устройства не являются гармоническими. Их частота и период зависят от амплитуды. При уменьшении амплитуды частота колебаний неограниченно растет (в теории).

4. Если груз закреплен на ободе, при движении данного устройства с большим отклонением от равновесия может происходить проскальзывание или подпрыгивание.

5. Чтобы неваляшка совершала гармонические колебания (такие колебания выглядят более приятно с эстетической точки зрения) внутренний груз должен быть закреплен не слишком близко к дну, а отклонения от равновесия в процессе колебаний должны быть небольшими.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берман Г. Н. Циклоида. Об одной замечательной кривой линии и некоторых других, с ней связанных. — М.: Наука, 1980. — 113 с.
2. Бутиков Е. И. Физика в примерах и задачах / Е. И. Бутиков, А. А. Быков, А. С. Кондратьев. — М.: МЦНМО; СПб.: Петрогриф, 2008. — 515 с.
3. Литлвуд Дж. Математическая смесь. — М.: Наука, 1990. — 140 с.
4. Ivanov A. P. New feature in hoop dynamics: hidden jump // Non linear Dynamics. — 2020. — Vol. 102, № 4. — P. 2311–2321. — DOI 10.1007/s11071-020-06016-4. — EDN NLDDCA.
5. Парадокс обруча. GetAClass — Физика в опытах и экспериментах. — URL: https://www.youtube.com/watch?v=7znx8dgMRnA.

Уральский государственный
университет путей сообщения

Поступила в редакцию 27.01.24.