ISSN 2307-5457

Primus inter pares

Материалы XXVI Всероссийской научно-практической конференции

„Учебный физический эксперимент: Актуальные проблемы. Современные решения"

НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ОБРАЗОВАНИЯ

УЧЕБНАЯ ФИЗИКА

Июль - сентябрь 2021 №3

Издается с января 1997 года

СОДЕРЖАНИЕ

Науковедение

Исследования

Адрес редакции, издателя и типографии: 427621, Удмуртия, Глазов, Первомайская, 25, Пединститут, Телефон: (34141) 5–32–29.
E-mail: kropa@bk.ru

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Глазовский государственный педагогический институт имени В. Г. Короленко»

Журнал «Учебная физика» зарегистрирован Комитетом Российской Федерации по печати 4 февраля 1997 года, регистрационный №015686, перерегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор) 2 мая 2017 года, ПИ № ФС77–69506.

Сдано в набор 19.11.21. Подписано в печать 09.12.21. Дата выхода в свет: 17.12.21. Формат 60×90 1/16. Усл. печ. л. 4,5.

Заказ 147. Тираж 200 экз. Цена свободная.

Первая страница обложки: Дифракция Френеля на щели и на проволоке (Mayer V V and Varaksina E I Study of Babinet's principle and Rayleigh criterion through elementary theory and simple experiments *Eur. J. Phys.* 42 (2021) 065302 (15pp)).

УДК 53.088

С. А. Герасимов

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ И МЕТОД ПЛОЩАДЕЙ: ЧТО И КОГДА ЛУЧШЕ?

Метод наименьших квадратов, как выясняется, вовсе не панацея при аппроксимации экспериментальных данных. Существует способ описания экспериментальных зависимостей, дающий несравненно лучшие результаты.

Ключевые слова: аппроксимация, метод наименьших квадратов, среднеквадратичная ошибка, моделирование.

Измерительная аппаратура имеет право на ошибку. Если проводятся прямые измерения одной и той же величины y, то ошибка, она же погрешность измерения, оценивается сравнительно просто. Достаточно вычислить так называемую среднеквадратичную ошибку:

$$\sigma' = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \langle y\rangle\right)^2},$$

где $\langle y\rangle$ — среднее значение, оно же математическое ожидание величин y_i. Если нас интересует погрешность косвенных измерений, то и для этого есть ряд проверенных правил [1]. Хуже, непонятнее, если приходится изучать экспериментально зависимость одной величины от другой. Казалось бы и для этого есть тысячу раз проверенный, апробированный и обоснованный метод. Это — метод наименьших квадратов [2]. Вытекает он из условия минимума среднеквадратичной ошибки. Например, для линейной регрессии достаточно продифференцировать дисперсию

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - (ax_i + b))^2 \tag{1}$$

по величинам a и b, определяющим математическое ожидание (среднее значение y_i для заданного интервала i), чтобы из условия минимума среднеквадратичной ошибки получить пару уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i}^{n} x_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i + bn. \tag{2}$$

Решение этой системы уравнение легко получается [3]:

$$a = \frac{1}{D}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right),$$

$$b = \frac{1}{D}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right),$$

где

$$D = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Всегда ли метод наименьших квадратов справляется с экспериментальными зависимостями, выдавая за правду коэффициенты линейной регрессии? Такого быть не может. Будучи решением обратной задачи, он не может быть устойчив всегда.

Следует точно обозначить границы применения этого метода. Граница — это та черта, та область, за пределами которой метод, способ, модель перестают работать. Нужен пример неудачного использования этого метода наименьших квадратов. Сначала надо договориться, как оценивать, как проверить качество и правильность нахождения тех же коэффициентов a и b. Проверить результаты обработки на примере известной экспериментальной линейной зависимости, конечно, можно. А сравнивать с чем? Не с чем. Это раз. А если результат окажется правильным, совпадающим с тем, что должно быть, то что тогда? Утверждать, что метод наименьших квадратов — панацея от всех бед и грехов эксперимента? Чтобы произнести слово «всех», на это нужны основания, которых, разумеется, нет. Альтернативой «всего» является «один». Нужна хотя бы одна линейная зависимость с заведомо известными точными значениями коэффициентов. Есть единственный способ заполучить такую зависимость: создать ее, то есть смоделировать, воспользовавшись генератором случайных чисел с заданным значением полуширины σ (рис. 1).

Обычно метод наименьших квадратов используется при обработке зависимостей с примерно равномерным распределением абсцисс. Ничего необычного, ставящего под сомнение метод наименьших квадратов (МНК), получить не удастся, а небольшие отклонения получаемых коэффициентов аппроксимации от заданных значений едва ли представляют интерес. Другое дело, если экспериментальные значения сгущаются в области малых значений абсцисс (рис. 1). Чем больше точек, тем выше должна быть точность, а значит коэффициент b в зависимости $ax + b = x + 1$ должен быть определен наиболее точно.

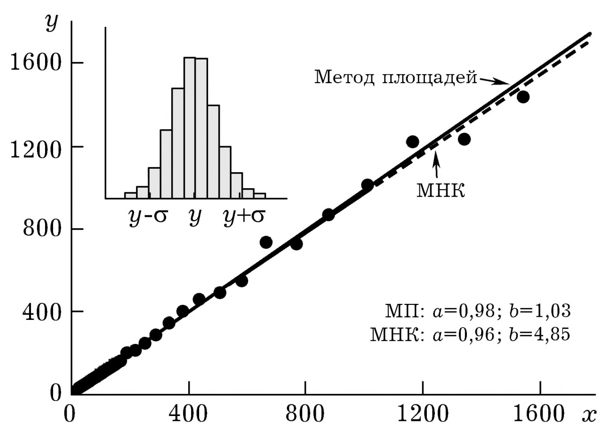

Рис. 1. Модельная зависимость $y = 1 + x$, заданная генератором случайных чисел

Это не произошло: найденное значение коэффициента b почти в 5 раз превышает заданное, и это всего лишь при значении полуширины в пять процентов от значения y_i. Произошло следующее. Метод наименьших квадратов пытался по двум точкам провести прямую. Одна точка — малые значения «иксов», а значит и малые значения «игреков». А вот вторую точку МНК выбирает, исходя из минимума стандарта; относительная ошибка там меньше, где среднее значение велико. Это происходит не только при моделировании, но и в реальных измерениях. На глазок, без использования МНК или чего-то другого, мы всегда пытаемся выбрать в качестве второй точки экспериментальный результат с максимальным значением ординаты, надеясь на то, что ему соответствует минимальная относительная ошибка. Проверить это утверждение можно чрезвычайно просто: достаточно количество обрабатываемых точек уменьшить всего лишь на 1, чтобы получить значение коэффициента b, отличающееся от того, что приведено на первом рисунке, значительно.

Сделав такое заявление, слегка покритиковав метод наименьших квадратов, надо пойти дальше. Ту же самую систему уравнений (2) можно получить, сначала умножив уравнение регрессии $y_i = ax_i + b$ на x_i и просуммировав по всем $1 \leqslant i \leqslant n$, а затем просто просуммировав это уравнение по всем i. Такая интерпретация наводит на мысль, а что если один раз уравнение регрессии просуммировать по первой половине экспериментальных результатов, а второй раз — по второй [4]:

$$\sum_{i=1}^{n/2} y_i = a\sum_{i=1}^{n/2} x_i + b\frac{n}{2}, \qquad \sum_{i=n/2+1}^{n} y_i = a\sum_{i=n/2+1}^{n} x_i + b\frac{n}{2}. \tag{3}$$

Эта система решается даже проще, чем (2):

$$a = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n/2} y_i - \sum\limits_{i=n/2+1}^{n} y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n/2} x_i - \sum\limits_{i=n/2+1}^{n} x_i}, \qquad b = \frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n/2} y_i - a\sum_{i=1}^{n/2} x_i\right).$$

Возникает вполне законный вопрос: а не даст ли такая манипуляция лучшие по сравнению с методом наименьших квадратов результаты аппроксимации? Оказалось, что иногда он позволяет получить несравненно лучшие результаты, и это показано на том же первом рисунке. Этот метод (МП), чем-то напоминающий вычисление площадей под участками прямой для данной специально подобранной зависимости, оказался несравненно лучшим, с какой стороны ни посмотри.

Все, что утверждается, должно быть однозначно определено. С распределением случайных величин все понятно. Оно гауссово и определяется полушириной σ. Распределение значений x_i, использованных в примере на рис. 1, по всему обрабатываемому диапазону от 0 до 1800, логарифмическое: каждый последующий интервал $x_{i+1} - x_i$ был больше предыдущего в 1,2 раза. Сделать так, чтобы при одном и том же диапазоне он уменьшался, — возможно, но это создает проблемы. Лучше разбиение задать следующим простым способом: пусть $x_i = Ai^{\alpha}$, а коэффициент A выбрать из условия равенства x_i последнему значению абсциссы. Если всего точек 20, то $x_{20} = A \cdot 20^{\alpha}$, $x_1 = 0,1$, $x_{20} = 10$. Полезно ввести еще одну переменную $s = \sigma/(1x+1)$. Сравнивать, конечно, придется полученные в результате обработки методом наименьших квадратов (МНК) и методом площадей (МП) значения коэффициентов a и b с заданными $a = 1$ и $b = 1$. Вот теперь есть все, чтобы убедиться, что и когда лучше (рис. 2 и рис. 3).

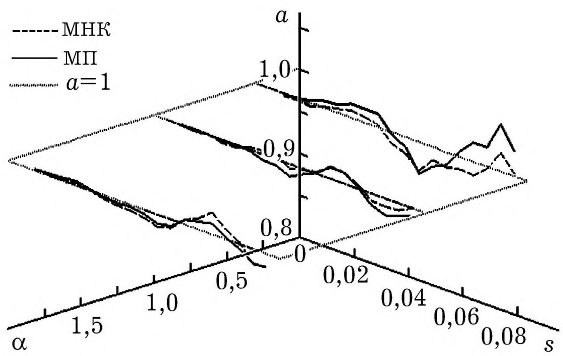

Рис. 2. Коэффициент a

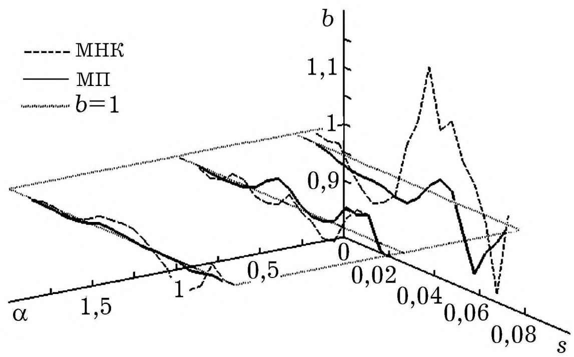

Рис. 3. Коэффициент b

Получается, что метод площадей почти всегда дает лучшие результаты. Исключение составляют дробные значения α, при которых точки сгущаются в области больших значений аргумента; при этом касается это только коэффициента a (рис. 2) и только рассмотренного набора данных, а если вернуться к тому, что представлено на рис. 1 и еще к одному примеру [4], то такое заключение можно сделать более уверенно.

Не надо думать, что это единственный вариант использования этого метода. Кто сказал, что достаточно только изменить области суммирования? А что если уравнение регрессии умножить на что-нибудь другое, отличающееся от x, и просуммировать? Вариантов много, вывод один: существуют экспериментальные задачи, для которых пока не обоснованный метод площадей как раз то, что надо, чтобы решить проблему.

Немного не по делу. Воспользовавшийся методом площадей может оказаться в затруднительном положении. Представляя отчет о проделанной лабораторной работе, проведенном научном исследовании, конечно же, безопаснее сослаться на метод наименьших квадратов. Чем-то это напоминает действие с двойными стандартами. С такими аттестованными методиками и стандартизованными приемами мы сталкиваемся на каждом шагу. С этим пока придется смириться. Лучше относиться к этому методу как к альтернативному. Например, формулы, позволяющие выполнить Фурье-преобразование экспериментальных периодических зависимостей [5], могут быть получены и исходя из метода наименьших квадратов, и примерно так, как дал о себе знать метод площадей. Умножаем на синус экспериментальную периодическую зависимость и суммируем по всем значениям аргументов в пределах диапазона, кратного периоду, получаем одно уравнение. Умножаем на косинус и делаем то же самое, — получаем другое. Метод наименьших квадратов, он не только для линейной зависимости. Записав дисперсию (1), в которой вместо линейной зависимости стоит гармоническая функция с неизвестными коэффициентами перед синусом и косинусом, продифференцировав дисперсию по этим коэффициентам, приравняв полученные выражения нулю, получаем то же. Ни физика, ни тем более математика не запрещают такую процедуру при регрессивном анализе. А если нет запрета, то зачем создавать проблемы, сознавая, что затруднения и возникшие ошибки могут быть совершенно не оправданы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. — М.: Мир, 1985. — 242 с.
2. Агекян Т.А. Основы теории ошибок для астрономов и физиков. — М.: Наука, 1968. — 148 с.
3. Худсон Д. Статистика для физиков. — М.: Мир, 1967. — 296 с.
4. Герасимов С.А., Болдырев Д.В. Метод площадей в обработке данных физического эксперимента // Проблемы учебного физического эксперимента. Сборник научных трудов. Выпуск 33. — М.: ИСРО РАО, 2021. — С. 14–16.
5. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. — М.: Мир, 1989. — 540 с.

Южный федеральный университет

Поступила в редакцию 24.03.21.

ABSTRACTS

Mayer V. V., Varaksina E. I. Spark voltmeter for measuring high voltage. A simple spark voltmeter for measuring high voltage is described. The device can be made when students are performing an educational and research project and used in demonstration experiments in school lessons. *Keywords:* spark discharge, breakdown voltage, spark voltmeter, educational and research project.

Mayer V. V., Danilov I. N. Experimental verification of the solution of a physical problem. An experiment is considered to test the solution of a well-known problem relative to an electrical circuit consisting of three series-connected galvanic cells forming a closed circuit. *Keywords:* galvanic cell, electromotive force, internal resistance, short circuit, physical problem, experimental verification.

Gerasimov S. A. Least-square method and area-method: what's better? The least-square method is not at all a panacea at approximation of experimental data. There exists another way of describing experimental dependences, which sometimes gives incomparable better results. *Keywords:* approximation, least-square method, root-mean-square error, modeling.

Mayer V. V., Varaksina E. I. Normal light dispersion in demonstration and laboratory experiments. Demonstration and laboratory experiments on qualitative and quantitative educational research of normal light dispersion are proposed. The objects of the study are the Amichi direct vision prism and the triangular equilateral prism made of flint glass of the TF3 brand. Simple and affordable devices for demonstration, observation and photographing dispersion curves on a smartphone are described. Manual and computer methods of processing experimental results are considered. *Keywords:* normal dispersion of light, lecture demonstration, laboratory work, educational research, dispersion curve, photographing on a smartphone.

Mukushev B. A. Computational experiments in physical research. The article deals with the implementation of computational (computer) experiments in the study of physical phenomena. The main stages of conducting computational experiments are highlighted. The issues of creating physical, mathematical and computer models of the objects under study are considered. These models form the basis of each stage of the computational experiment. The article describes the method of using the MathCAD during the experiment. *Keywords:* computational experiment, physical, mathematical and computer model, computational algorithm, numerical analysis, MathCAD application software package.

Saurov Yu. A. At the Academy of Pedagogical Sciences of the USSR: about the spiritual life of the older generation of methodologists-physicists ... (Facts of a bygone reality). The article reveals some features of the professional life of methodologists-physicists of the older generation: discipline, accuracy, attentiveness, content, etc. *Keywords:* physics education, methods of communication and activity, letters.

Varaksina E. I. Educational experiment in modern school physics education. The results of an ascertaining pedagogical experiment aimed at identifying the problems of using educational experiments in teaching physics at school are presented. *Keywords:* physics teacher, school graduate, school physics room, educational equipment, knowledge of experiment.